Ein stochastisches Modell zur Ertragsoptimierung bei Versicherungen

Claudia Garschhammer und Rudi Zagst

Claudia Garschhammer
Bahnhofstr. 34, 83410 Laufen
Tel: 08682 / 1548, c.garschhammer@web.de

Prof. Dr. Rudi Zagst, Direktor HVB-Stiftungsinstitut für Finanzmathematik
Zentrum Mathematik, TU München
Boltzmannstr. 3, 85748 Garching bei München
Tel.: 089 / 289 - 17404, zagst@ma.tum.de

Zusammenfassung:
Zugrunde gelegt wird ein stochastisches Modell, das verschiedene versicherungsspezifische Risiken abbildet. Ziel ist es, das Versicherungsportfolio bestehend aus dem gezeichneten Risiko, dem Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden und der Kapitalanlage bezüglich der Rückversicherungsquote und der risikobehafteten Anlagemöglichkeit zu optimieren.

Schlüsselworte:
Risiko, Ertrag, Rückversicherung, Spätschadenreserve, Erwartungsnutzen-Optimierung

1 Einleitung

Unternehmerische Entscheidungen sind mit Risiken verbunden, da die Auswirkungen dieser Entscheidungen in der Regel nicht vorhergesagt werden können. Risiken werden jedoch in Kauf genommen, um Chancen wahrzunehmen und um Erfolge zu erzielen. Für eine erfolgsorientierte Unternehmensführung ist daher eine zielorientierte, bewusste und systematische Auseinandersetzung mit den Chancen und Risiken ihrer Entscheidungen unerlässlich. Die Risiken mit denen ein Versicherungsunternehmen konfrontiert ist, lassen sich im wesentlichen in vier Risikokategorien einteilen. Marktrisiken sind in aller Regel getrieben von Kursänderungen an den Aktien-, Zins-, Devisen- oder Immobilienmärkten und betreffen die Beteiligungen an börsengehandelten Unternehmen, riskante Anlagen der Versicherungsreserven, abgegebene Garantien für Versicherungsprodukte oder eigene Handelsrisiken. Aktuarielle Risiken entstehen durch den Eintritt von Schadensfällen, Katastrophen oder auch Langlebigkeit und betreffen das gesamte Versicherungsgeschäft. Kreditrisiken entstehen durch Ratingänderungen von Unternehmen oder Zahlungsausfälle. Dies betrifft vor allem Unternehmensanleihen, Darlehen oder Kreditversicherungen. Operationale Risiken sind typische Risiken des operativen Geschäfts wie z.B. ein Absturz des IT-Systems, Betrug oder anstehende Prozesse. Diese Arbeit konzentriert sich auf die ersten beiden Kategorien und deckt dabei einen bedeutenden Prozentsatz der bei einem Versicherer auftretenden Risiken ab.

Trotz augenscheinlicher Ähnlichkeit von Versicherungsrisiken und Kapitalrisiken gibt es einen grundsätzlichen Unterschied: Kapitalrisiken können aufgrund geringerer Transaktionskosten, leichterer Diversifikation und Möglichkeiten der Absicherung durch Derivate i.a. einfacher gehandhabt werden als Versicherungsrisiken. Diversifikation auf der Seite der Versicherungstechnik beinhaltet Zeichnungs- und Produktpolitik, im Extremfall auch den Kauf eines anderen Versicherungsunternehmens oder den Verkauf von Teilen des Portfolios. Bestimmte Versicherungsrisiken, wie Schadenreserven in schwierigen Haftungsklassen oder bestimmten Katastrophenrisiken können u.U. gar nicht rückversicherbar sein. Eine rechtzeitige Planung unter Einbezug der möglichen zukünftigen Entwicklungen ist daher unumgänglich. Neben der Einrichtung entsprechender Frühwarnsysteme, die entstehende Risiken rechtzeitig aufzeigen und der Einführung adäquater Risikomanagementprozesse und Guidelines sollte die komplette Kapitalallokation eines Unternehmens anhand eines ausgewogenen bzw. optimierten Chancen-Risikoprofils erfolgen. Ziel sollte es dabei sein, den Wert des Unternehmens zu steigern, ohne jedoch dabei zu hohe Risiken einzugehen. Die Entwicklung eines mathematischen Modells zur Beschreibung und Umsetzung dieses Unternehmenszieles wird im Folgenden erläutert.

Grundlage dieses Artikels ist ein von René Schnieper in [Schnieper(1997)] veröffentlichtes Modell, in dem der Zusammenhang zwischen dem Gewinn eines Versicherungsunternehmens und seinen Kapitalbedürfnissen untersucht wird. Wir nehmen jedoch an, dass das Unternehmenskapital gewissen Unsicherheiten wie z.B. Preis- oder Zinsänderungen unterliegt und dass es das Ziel des Unternehmens ist, seinen risikoadjustierten Ertrag zu maximieren. In Abschnitt 2 führen wir das hierzu verwendete stochastische Modell in seiner allgemeinen Form ein. Bevor dieses jedoch eingehend untersucht wird, behandeln wir ein vereinfachtes Modell, das bereits wesentliche Strukturaussagen enthält, allerdings z.B. noch keine risikobehaftete Kapitalanlage oder die Berücksichtigung der Spätschadenreserve erlaubt. Im Rahmen dieses Modells wird eine für das Unternehmen optimale Rückversicherungsquote bestimmt und deren Abhängigkeit von verschiedenen Einflussfaktoren untersucht. Abschnitt 4 behandelt die Schätzung der Spätschadensreserve, welche am Fall eines beispielhaften Versicherungsunternehmens illustriert wird, das uns durch alle Abschnitte begleitet. Abschnitt 5 liefert schließlich eine Lösung für die optimale Struktur des Unternehmensportfolios im allgemeinen Modell und gibt die zu wählende Anlage-und Rückversicherungspolitik explizit an. Abschließend werden die Ergebnisse des vereinfachten und des vollständigen Modells theoretisch und anhand unseres Beispielunternehmens verglichen.

2 Das allgemeine stochastische Modell

Wir betrachten ein allgemeines Versicherungsunternehmen unter rein finanz- und risikotheoretischen Gesichtspunkten, d.h. es erfolgt weder eine Betrachtung der Marktstrategie noch der Qualität des Managements. Die Preise der Versicherungsprodukte ergeben sich durch das makroökonomische Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage und werden somit nicht durch das Unternehmen selbst beeinflusst. Im Hinblick auf die Unternehmensbilanz wird auf der Passivseite die aktuelle Zinsstruktur angewendet und die Bewertung der Kapitalanlagen erfolgt zu Marktpreisen. Kosten und Dividenden finden keine Berücksichtigung. Die Unternehmenskonten basieren auf einem bestimmten Schadenjahr. Nach kleinen Änderungen kann allerdings auch jede andere gebräuchliche Basis, wie z.B. das Jahr des Vertragsbeginns, verwendet werden. Mit der eingenommenen Prämie, die sich aus dem erwarteten Schaden des betrachteten Jahres $E[S]$ und dem Sicherheits- bzw. Schwankungszuschlag b zusammensetzt und der Spätschadenreserve ΔL soll der Gesamtschaden S des betrachteten Jahres beglichen werden. Der Gewinn, den das Unternehmen durch die Anlage des verfügbaren Kapitals erzielt, wird im Modell durch ΔA repräsentiert. Damit lässt sich die Veränderung des gesamten Unternehmenskapitals ΔU folgendermaßen beschreiben:

$$\Delta U = E[S] + b - S - \Delta L + \Delta A\,. \tag{1}$$

Als **Rendite des Unternehmens** bezeichnen wir das Verhältnis der Änderung des Unternehmenskapitals im laufenden Geschäftsjahr zum Unternehmenskapital zu Beginn des Geschäftsjahres, d.h.

$$R_U := \frac{\Delta U}{u}.$$

Bildet man den Erwartungswert der eben definierten Größe, so sprechen wir vom **Ertrag** μ des Unternehmens. Die Standardabweichung der Rendite wird als **Risiko** σ bezeichnet:

$$\mu := E[R_U] = \frac{E[\Delta U]}{u} \qquad \text{und} \qquad \sigma := \sigma(R_U) = \frac{\sigma(\Delta U)}{u}.$$

Es wird unterstellt, dass Entscheidungen zur Ertragsoptimierung des Unternehmens einzig auf Basis der Parameter Ertrag und Risiko getroffen werden.

Bei bekannter Risiko-Ertrags-Präferenz möchte man einerseits einen möglichst hohen Ertrag erzielen, andererseits soll das Risiko möglichst gering gehalten werden. Der funktionale Zusammenhang zwischen Ertrag und Risiko sei gegeben durch die hier als **Erwartungsnutzen** bezeichnete Funktion $\nu(\mu,\sigma)$ mit[1]

$$\nu(\mu,\sigma) := \theta \cdot E[R_U] - Var[R_U] = \theta \cdot \mu - \sigma^2 .$$

Alle Paare (σ,μ), die den gleichen Wert ν annehmen, befinden sich auf derselben Indifferenzkurve. Der einzige Parameter θ beschreibt den Trade-Off zwischen Ertrag und Risiko gemessen mit dem (individuellen) Grad an Risikoaversion im Risko-Ertrags-Raum (σ,μ) und wird nach [Uhlir(1994), Seite 145] als **Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter** bezeichnet. Das Unternehmen fordert für eine zusätzliche Risiko- bzw. Varianzeinheit das θ-fache an Ertrag. Wie der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter ermittelt werden kann, wird z.B. in [Spremann(1996), Seite 502] erläutert.

Beispiel:
Zur Illustration der einzelnen Ergebnisse soll uns ein Unternehmen begleiten, dessen Versicherungsportfolio sich aus folgenden drei Sparten zusammensetzt:

- *Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung mit* v_H *=40.000 versicherten Risiken:* S^H
- *sonstige Kraftfahrtversicherung* $\big($*Fahrzeugvollversicherung, Fahrzeugteilversicherung und Kraftfahrtunfallversicherung*$\big)$ *mit* v_K *=25.000 Risiken:* S^K
- *Feuer- und Sachversicherung* $\big($*z.B. Sturmversicherung, verbundene Hausratversicherung, Technische Versicherungen, Transportversicherung*$\big)$ *mit* v_F *=400.000 Risiken:* S^F

Somit ergibt sich ein Gesamtschaden von

$$S = S^H + S^K + S^F = \sum_{i=1}^{40.000} S_i^H + \sum_{i=1}^{25.000} S_i^K + \sum_{i=1}^{400.000} S_i^F .$$

Der erwartete Gesamtschaden wird auf $E[S] = 35.410.076$ *Euro und die*

---

[1]Die Bezeichnung von ν als Erwartungsnutzen rührt daher, dass Funktionen dieser Struktur bei der Maximierung des Erwartungsnutzens entstehen, wenn z.B. die Nutzenfunktion des Unternehmens gegeben ist durch $N(R_U) = \theta \cdot R_U - (R_U^2 - \mu^2)$ oder im sogenannten hybriden Modell, d.h., wenn R_U normalverteilt ist und die Nutzenfunktion die Struktur $N(R_U) = -\theta \cdot e^{-\frac{R_U}{\theta}}$ besitzt (vergleiche z.B. [Spremann(1996), Seite 502]).

Standardabweichung auf $\sigma(S) = 2.226.761$ *Euro geschätzt. Dabei gehen wir im Rahmen der Beispielrechnungen davon aus, dass die einzelnen Sparten unkorreliert sind. Weiter legen wir unseren Modellrechnungen zu Grunde, dass in unserem Unternehmen zu Beginn des Jahres ein Kapital in Höhe von* $u = 12$ *Millionen Euro vorhanden ist und sich die Rendite der risikolosen Anlage auf* $r = 4,5\%$ *beläuft. Der Sicherheitszuschlag* b *sei mit* $5,5$ *Millionen Euro gegeben.* □

3 Das vereinfachte Modell

Vorbereitend werden in einer vereinfachten Version des eben eingeführten Modells weitere spezifische Annahmen getroffen. Dabei gehen wir zum Einen davon aus, dass die einzigen Anlageerträge von der risikolosen Anlage des Eigenkapitals mit Rendite r stammen. D.h. es gilt:

$$\Delta A = r \cdot u.$$

Implizit wird damit auch unterstellt, dass das gesamte Unternehmenskapital u für die Kapitalanlage zur Verfügung steht. Des weiteren berücksichtigen wir zunächst keine Spätschadenreserve:

$$\Delta L = 0.$$

Statt (1) erhält man nun das vereinfachte Modell:

$$\Delta U = E[S] + b - S + r \cdot u \tag{2}$$

mit Ertrag

$$\mu = \frac{E[\Delta U]}{u} = \frac{b}{u} + r \qquad \text{und Risiko} \qquad \sigma = \frac{\sigma(\Delta U)}{u} = \frac{\sigma(S)}{u}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich damit die Gleichung

$$\mu - r = k \cdot \sigma \quad \text{mit} \quad k := \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{b}{\sigma(S)}.$$

Der Ertrag μ und das Risiko σ liegen auf einer Geraden mit Steigung k und Achsenabschnitt r. Die Gerade gibt somit die Menge der erreichbaren Risiko-Ertrags-Paarungen (σ^*, μ^*) für verschiedene Kapitalniveaus an. Man kann die Differenz $\mu^* - r$ als Risikoprämie interpretieren, die den Kapitalgebern die Übernahme des Risikos σ^* vergütet.

3.1 Quoten-Rückversicherung im vereinfachten Modell

Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots, S_I$ die Risiken der verschiedenen Versicherungsportfolios $i = 1, \ldots, I$ und $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ den Gesamtschaden des Unternehmens. Unter der Annahme einer geeigneten Gesamtschadenverteilung[2], kann man z.B. durch die Formel

$$b = Q_{1-\varepsilon} \cdot \sigma$$

den Sicherheitszuschlag b des Gesamtrisikos bestimmen. Dabei bezeichnet $Q_{1-\varepsilon}$ das (1-ε)-Quantil der standardisierten Gesamtschadenverteilung. Der Sicherheitszuschlag lässt sich dann gemäß dem Kovarianzprinzip[3] durch die Größen

$$b_i = \frac{Cov\left[S_i, S\right]}{Var[S]} \cdot b$$

auf die Einzelrisiken S_i, $i = 1, \ldots, I$, aufteilen. Sind S_i und $S - S_i$ unabhängig, so gilt das Varianzprinzip

$$b_i = \frac{Var[S_i]}{Var[S]} \cdot b.$$

b_i bezeichnet im Folgenden den für Risiko i gegebenen Sicherheitszuschlag und σ_i^2 dessen Varianz, $i = 1, \ldots, I$. Es wird angenommen, dass das Unternehmen nicht das volle Zeichnungsrisiko S alleine trägt, sondern für jedes Einzelrisiko S_i einen Teil α_i selbst behält und den verbleibenden Teil $1 - \alpha_i$ an seinen Rückversicherer abtritt (**Quoten-Rückversicherung**[4]). Für den Erstversicherer bleiben damit folgende durch den Index EV gekennzeichnete Größen erhalten:

---

[2]Wie z.B. Gamma-, Lognormal- oder Inverse Gaußverteilung.
[3] Vergleiche [Mack(1997)] oder [Garschhammer, Seite 18]. Cov bezeichnet dabei die Kovarianz und Var die Varianz der in der Klammer notierten Zufallsvariablen.
[4]Vergleiche [Mack(1997)] oder [Garschhammer, Seite 26].

$$S_{EV} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i$$

$$E[S_{EV}] = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i E[S_i]$$

$$b_{EV} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i b_i = \underline{\alpha}' \underline{b}$$

$$Var[S_{EV}] = Var\left[\sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i\right] = \underline{\alpha}' \Sigma^S \underline{\alpha}$$

mit $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_I)'$, $\underline{b} := (b_1, \ldots, b_I)'$ und $\Sigma^S := (Cov[S_i, S_j])_{i,j=1,\ldots,I}$ sowie $\sigma_i^2 := Var[S_i]$. Folglich erhält man nach Rückversicherung statt (2) die Gleichung

$$\Delta U = E[S_{EV}] + b_{EV} - S_{EV} + r \cdot u \quad .$$

Das Rückversicherungsunternehmen wird ohne Rücksicht auf die Größe eines Risikos mit einem bestimmten einheitlichen Prozentsatz an allen gezeichneten Risiken einer Sparte beteiligt und erhält als Kompensation einen entsprechenden Teil der vom Erstversicherer vereinnahmten Prämie. Der Betrag $(1-\alpha_i) \cdot E[S_i] + (1-\alpha_i) \cdot b_i$ geht somit für jedes Einzelrisiko S_i, $i = 1, \ldots, I$, in die Gewinn- und Verlustrechnung des Erstversicherers als Aufwand ein.

3.2 Ermittlung der optimalen Rückversicherungsquote

Durch Weitergabe eines Teils der Risiken in Form einer Rückversicherung kann der risikoadjustierte Ertrag bei gegebenen Sicherheitszuschlägen b_i der Einzelrisiken S_i, $i = 1, \ldots, I$, beeinflusst werden. Im Folgenden wird gezeigt, wie die optimalen Selbstbehaltquoten α_i, $i = 1, \ldots, I$, zu bestimmen sind, die das Verhältnis zwischen Ertrag und Risiko bei gegebenem Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter θ maximieren.

Satz 3.1[5]

Beschreibe $S_1, S_2, \ldots, S_I$ *die Schäden der Teilportfolios* $i = 1, \ldots, I$, $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ *den*

---

[5] Der Beweis zu diesem Satz sowie alle weiteren fehlenden Beweise können gerne bei Herrn Prof. Zagst (zagst@ma.tum.de) angefragt werden.

Gesamtschaden und die Kovarianzmatrix Σ^S *sei positiv definit. Dann sind die optimalen Selbstbehaltquoten, die die Funktion*

$$\underline{\alpha} \mapsto v(\mu_{EV}(\underline{\alpha}), \sigma_{EV}(\underline{\alpha})) = \theta \cdot \mu_{EV}(\underline{\alpha}) - \sigma_{EV}^2(\underline{\alpha}), \quad \theta \geq 0,$$

maximieren, gegeben durch[6]

$$\underline{\alpha}^{VM} = \frac{1}{2}\theta u\,(\Sigma^S)^{-1}\underline{b}. \tag{3}$$

+

Je kleiner der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter θ, desto mehr Ertrag wird benötigt, um bei gegebenem Risiko das gleiche Nutzenniveau zu halten. Dies bedeutet, dass das Unternehmen risikoaverser ist und folglich einen größeren Anteil der Risiken abgibt. Die Selbstbehaltquote α sinkt daher mit fallendem θ. Eine weitere Interpretation erhält man mit Hilfe des folgenden Korollars, das sich direkt aus Satz 3.1 ergibt.

Korollar 3.2

Sind die Schäden $S_1, S_2, \ldots, S_I$ *der Teilportfolios aus Satz 3.1 unkorreliert, so sind die optimalen Selbstbehaltquoten* $\underline{\alpha}^{VM*}$ *gegeben durch*

$$\alpha_i^* = \frac{\theta u \cdot b_i}{2\sigma_i^2} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, I.$$

Je kleiner also das Risiko σ_i, desto größer die Selbstbehaltquote α_i des Erstversicherers. Ebenso steigt die Selbstbehaltquote mit steigendem Sicherheitszuschlag b_i und steigendem Unternehmenskapital u.

Beispiel (Fortsetzung):

Mit S_H, S_K *und* S_F *werden wieder die Gesamtschäden der drei Sparten Kfz-Haftpflicht, sonstige Kfz- und Feuer-/Sachversicherung bezeichnet. Wir nehmen an, dass die Schäden der drei Sparten durch die Verteilungen*

---

[6]Das Optimierungsproblem wurde ohne Nebenbedingungen gelöst. Verletzt obige Lösung (3) die Restriktion $0 \leq \underline{\alpha} \leq 1$, so ist diese Nebenbedingung in das Optimierungsproblem aufzunehmen. Dabei ist $0 \leq \underline{\alpha} \leq 1$ komponentenweise zu lesen. Die Lösung des neuen Problems kann dann mit Hilfe eines konvexen Optimierungsproblems berechnet werden (vergleiche [Fletcher(1981), Seite 51] oder [Garschhammer, Seite 44 und 64]).

Kfz-Haftpflicht: $S_H \sim \Gamma\left(v_H \cdot 0{,}004616; 57.192{,}37^{-1}\right), v_H = 40.000$

sonstige Kfz: $S_K \sim \Gamma\left(v_K \cdot 0{,}009290; 15.715{,}82^{-1}\right), v_K = 25.000$

Feuer/Sach: $S_F \sim \Gamma\left(v_F \cdot 0{,}000262; 202.290{,}08^{-1}\right), v_F = 400.000$

bestimmt sind. Erwartungswert und Varianz der Gammaverteilung mit Parametern q_j *und* λ_j *berechnen sich durch*

$$E[S^j] = \frac{q_j}{\lambda_j} \quad \text{und} \quad Var[S^j] = \frac{q_j}{\lambda_j^2}, \quad j = \{H, K, F\}$$

und somit ergeben sich für die einzelnen Sparten folgende Werte

$$E[S_H] = v_H \cdot 0{,}004616 \cdot 57.192{,}37 = 264 \cdot 40.000 = 10.560.000$$
$$\sigma_H = \sqrt{v_H \cdot 0{,}004616 \cdot 57.192{,}37^2} = 777.143$$
$$E[S_K] = v_K \cdot 0{,}009290 \cdot 15.715{,}82 = 146 \cdot 25.000 = 3.650.000$$
$$\sigma_K = \sqrt{v_K \cdot 0{,}009290 \cdot 15.715{,}82^2} = 239.505$$
$$E[S_F] = v_F \cdot 0{,}000262 \cdot 202.290{,}08 = 53 \cdot 400.000 = 21.200.000$$
$$\sigma_F = \sqrt{v_F \cdot 0{,}000262 \cdot 202.290{,}08^2} = 2.070.881.$$

Aufgrund der Annahme, dass die drei Sparten unkorreliert sind, können wir den Sicherheitszuschlag $b = 5.500.000$ *nach dem Varianzprinzip wie folgt aufteilen:*

$$b_H = \frac{777.143^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 669.912$$
$$b_K = \frac{239.505^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 63.628$$
$$b_F = \frac{2.070.881^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 4.756.921.$$

Da die Standardabweichungen der verschiedenen Sparten nur auf geschätzten Parametern und die Standardabweichung der Gesamtschadenverteilung auf einer an simulierte Daten angepassten Verteilung basiert, ergibt die Summe der Sicherheitszuschläge der drei Sparten nicht exakt den Gesamtsicherheitszuschlag des Unternehmens. Deshalb orientieren wir uns nur am Varianzprinzip und teilen den Sicherheitszuschlag folgendermaßen auf:

$$b_H = 670.000, \quad b_K = 70.000 \quad \text{und} \quad b_F = 4.760.000.$$

In Korollar 3.2 *ist für den Spezialfall unkorrelierter Teilrisiken die optimale Selbstbehaltquote* α_i* *für* i = H,K,F *angegeben. Für einen Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter in Höhe von* θ = 0,1 *ergibt sich:*

$$\alpha_{\mathrm{H}}^* = \frac{0{,}1}{2} \cdot \frac{670.000}{777.143^2} \cdot 12.000.000 = 66{,}56\%$$

$$\alpha_{\mathrm{K}}^* = \frac{0{,}1}{2} \cdot \frac{70.000}{239.505^2} \cdot 12.000.000 = 73{,}22\%$$

$$\alpha_{\mathrm{F}}^* = \frac{0{,}1}{2} \cdot \frac{4.760.000}{2.070.881^2} \cdot 12.000.000 = 66{,}60\%$$

Nach Rückversicherung bleiben für unser Unternehmen also die Größen

$$\begin{aligned} E[S_{EV}] &= 0{,}6656 \cdot 10.560.000 + 0{,}7322 \cdot 3.650.000 + 0{,}6660 \cdot 21.200.000 \\ &= 23.819.714 \\ b_{EV} &= 0{,}6656 \cdot 670.000 + 0{,}7322 \cdot 70.000 + 0{,}6660 \cdot 4.760.000 \\ &= 3.667.182 \\ \sigma(S_{EV}) &= \sqrt{0{,}6656^2 \cdot 777.143^2 + 0{,}7322^2 \cdot 239.505^2 + 0{,}6660^2 \cdot 2.070.881^2} \\ &= 1.483.418 \end{aligned}$$

erhalten. Die Prämie $E[S]+b$ *des Erstversicherers sinkt von* 40.910.076 *auf* 27.487.896 *Euro, bei einer geringeren Standardabweichung von* 1.483.418 *statt* 2.226.761 *Euro.* □

4 Die Spätschadenreserve

Wir wollen nun das vereinfachte Modell erweitern. Dabei werden auch RBNS- und IBNR-Schäden[7] berücksichtigt. Dies bedeutet, dass die Annahme ΔL = 0 nicht mehr zutreffend ist. Die Berechnung der benötigten Spätschadenreserve ΔL erfolgt mit Hilfe eines sogenannten Abwicklungsdreiecks.

---

[7]RBNS-Schäden: reported but not settled, IBNR-Schäden: incurred but not reported. Beide Arten von Schäden sind zwar in der betrachteten Periode induziert, werden aber erst später realisiert. Deshalb müssen diese Schäden geschätzt und in Form einer Spätschadenreserve zurückgestellt werden (vergleiche [Mack(1997)] oder [Garschhammer, Seite 27]).

4.1 Das Abwicklungsdreieck

Jeder Schaden hat eine individuelle Historie[8]. Er entsteht in einem Anfalljahr und wird dem Versicherungsunternehmen gemeldet. Das Versicherungsunternehmen leistet eine erste Zahlung und bildet für eventuell erforderliche weitere Zahlungen eine Einzelschadenreserve. Die Regulierung eines einzelnen Schadens und damit erst recht die Regulierung aller Schäden aus einem Anfalljahr, kann sich über mehrere Abwicklungsjahre erstrecken. Grundlage für die Bestimmung von Spätschadenreserven ist das sogenannte **Abwicklungsdreieck** in dem für jedes Anfalljahr und jedes Abwicklungsjahr die geleisteten Zahlungen aufgeführt sind (siehe Tabelle 1). Dabei betrachten wir w Anfalljahre und nehmen an, dass jeder Schaden entweder im Anfalljahr selbst oder in einem der $w-1$ folgenden Kalenderjahre abschließend reguliert wird. Das laufende Kalenderjahr wird mit $w+1$ bezeichnet. Es ist nicht im Abwicklungsdreieck enthalten, da für dieses Jahr noch keine Zahlungen geleistet wurden.

	Abwicklungsjahr t						
Anfalljahr s	1	2	3	4	.	.	.	w
1	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	.	.	.	Z_{1w}
2	Z_{21}	Z_{22}	.	.	.	.	$Z_{2,w-1}$	
3	Z_{31}	.				.		
.	.	.			.			
.	.	.		.				
.	.	.	.					
w - 1	.	$Z_{w-1,2}$						
w	Z_{w1}							

Tabelle 1: Abwicklungsdreieck: Aufgeführt sind alle Zahlungen, die bereits
geleistet wurden.

Wir betrachten also eine Familie $\{Z_{s,t}\}_{s,t\in\{1,..,w\}}$ von Zufallsvariablen, wobei $Z_{s,t}$ den im Abwicklungsjahr t aufgewendeten Betrag für im Anfalljahr s eingetretene Schäden bezeichnet. Als Anfall-, Ereignis- oder Vertragsjahr wird dabei dasjenige Jahr bezeichnet, in dem der Schaden eingetreten bzw. dem er buchhalterisch zuzurechnen ist. Das 1. Abwicklungsjahr (t = 1) ist das Anfalljahr selbst, das 2. Abwicklungsjahr (t = 2) ist das dem Anfalljahr folgende Kalenderjahr, usw. Das Jahr der Risikoübernahme wird mit $t = 0$ bezeichnet. Die Zahlung $Z_{s,t}$ wird somit im (relativen) Kalenderjahr $s+t-1$ geleistet. Folglich werden die auf einer Diagonalen stehenden Beträge für Schäden aus den verschieden Anfalljahren im gleichen Jahr bezahlt. Da wir uns am Ende von

[8]Vergleiche z.B. [Schmidt(2002), Kapitel 11].

Kalenderjahr w befinden, sind die Zahlungen $Z_{s,t}$ für $s+t-1 \leq w$ schon geleistet. Vom jüngsten Anfalljahr $s = w$ sind lediglich die Schäden bekannt, die im Laufe dieses Jahres eingetreten sind und gemeldet wurden. Vom am längsten zurückliegenden Anfalljahr $s = 1$ sind $t = w$ Abwicklungsjahre bekannt. Die Zahlungen, die das abgelaufene Kalenderjahr betreffen $(Z_{w1}, Z_{w-1,2}, \ldots, Z_{1w})$, stehen somit auf der Hypotenuse des Abwicklungsdreiecks und sind gegenüber der entsprechenden Situation vor einem Jahr neu hinzugekommen. Für die richtige Modellbildung ist hier festzuhalten, dass für jedes Anfalljahr s die Beträge $Z_{s,t}$ mit wachsendem t tendenziell abnehmen (evtl. nach einem kurzen Anstieg zu Beginn) und schließlich, nach spätestens w Jahren, gleich Null werden. Bei zunehmender Abwicklungsdauer wird es nämlich immer unwahrscheinlicher, dass sich noch Änderungen im Schadenstand ergeben. Ergänzt man das Abwicklungsdreieck aus Tabelle 1 zu einem Quadrat, so erhält man die noch ausstehenden Zahlungen, für die eine Reserve gebildet werden muss. In Tabelle 2 sind diese Zahlungen aufgeführt. Für eine realistische Modellbildung stellt sich nun die Frage, wie die zukünftigen Zahlungen geeignet geschätzt werden können.

	Abwicklungsjahr t							
Anfalljahr s	1	2	3	4	.	.	.	w
1								
2								$Z_{2,w}$
3							.	$Z_{3,w}$
.						.		.
.					.			.
.				.				.
w - 1			.					$Z_{w-1,w}$
w		$Z_{w,2}$	$Z_{w,3}$	.	.	.	$Z_{w,w-1}$	$Z_{w,w}$

Tabelle 2: Zahlungen, für die eine Spätschadenreserve gebildet werden muss.

4.2 Schätzung der Spätschadenreserve

Die in der Spätschadenreserve enthaltenen noch ausstehenden Zahlungen $Z_{s,t}$ mit $s+t-1 > w$ müssen für das Modell auf einen einheitlichen Bewertungszeitpunkt, hier Jahr w der letzten Gewinn- und Verlustrechnung, abgezinst werden. Dazu bezeichnen wir den Barwert zum Zeitpunkt w einer zum Zeitpunkt $w+j$ $(j > 0)$ bezahlten Geldeinheit mit $P(w, w+j)$. Dies bedeutet, dass man zum Zeitpunkt w den Betrag $P(w, w+j)$ bezahlt, um zum Zeitpunkt $w+j > w$ einen Euro zurückzubekommen. Eine ausführlichere Darstellung der stochastischen Modellierung dieser sogenannten Zero-Coupon-Bondpreise findet man z.B. in

[Zagst(2002), Kapitel 4.1]. Das vom Versicherungsunternehmen im Zeitpunkt w übernommene Risiko S (fällt frühestens im Jahr $w+1$ an) setzt sich aus den abgezinsten zufälligen Zahlungen der folgenden Abwicklungsjahre zusammen und beträgt somit im Betrachtungsjahr w

$$S := S^{w+1} = \sum_{j=1}^{w} P(w, w+j) \cdot Z_{w+1,j}. \tag{4}$$

Da jeder Schaden über w Jahre abgewickelt wird, interessieren uns für die Reservenbildung am Ende des Kalenderjahres w (Zeitpunkt der letzten Gewinn- und Verlustrechnung) nur die Schäden S^s mit $s = 2,\ldots,w$. Davor angefallene Schäden sind schon abgewickelt und für in der Zukunft anfallende Schäden braucht noch keine Reserve gebildet werden. Veranschaulicht wird dieser Sachverhalt in Abbildung 1. Die gestrichelte Linie markiert den Zeitpunkt der letzten Gewinn- und Verlustrechnung w. Alle Zahlungen links der gestrichelten Linie wurden in der Vergangenheit schon geleistet, die Zahlungen $Z_{s,w-s+1}$, $s = 1,\ldots,w$, auf der gestrichelten Linie wurden im abgelaufenen Jahr w beglichen und alle Zahlungen rechts der gestrichelten Linie müssen durch die am Ende des Jahres w geschätzte Spätschadenreserve gedeckt werden.

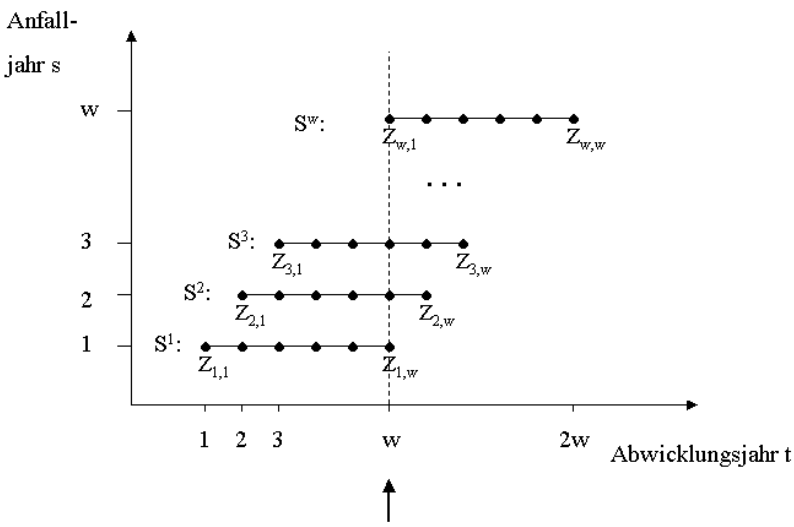

Abbildung 1: Abwicklung der Schäden $S^1,\ldots,S^w$ aus den Anfalljahren $s = 1,\ldots,w$

Kommen wir nun zurück zu der Frage, wie die noch ausstehenden Zahlungen geeignet geschätzt werden können. Im vorliegenden Modell werden sie auf Basis der im Jahr w verfügbaren Information bzw. Historie über den Schaden und über den Zins, modelliert durch entsprechende σ-Algebren, geschätzt. Der Erwartungswert der Zahlungen wird deshalb bzgl. der kleinsten aus den beiden $\sigma-$Algebren $H^Z_{s,w-s+1}$ (Schadenshistorie) und H^P_w (Zinshistorie) erzeugten σ-Algebra $\sigma(H^Z_{s,w-s+1}, H^P_w)$ bedingt. Dabei gehen wir davon aus, dass die Schadens- und Zinshistorie bzw. die entsprechenden σ-Algebren unabhängig sind (vergleiche z.B. [Williams(1991), Seite 91]). Wie bereits erwähnt befinden wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit am Ende des Jahres w. Für die Schäden S^s, $s = 2,\ldots,w$ wird eine Spätschadenreserve gebildet und die Schäden S^{w+1} werden von der Versicherung im laufenden Jahr übernommen. Zur Vereinfachung werden sie auch weiterhin mit S bezeichnet. Sei

$$L_{s,w-s+1} := E\left[\sum_{j=w-s+2}^{w} P(w, s-1+j)\cdot Z_{s,j} \mid \sigma(H^Z_{s,w-s+1}, H^P_w)\right], s = 2,\ldots,w \qquad (5)$$

die am Ende des Betrachtungsjahres w für das Risiko S^s **geschätzte Spätschadenreserve** des Unternehmens. Dies bedeutet, dass die noch ausstehenden Zahlungen für die Schäden auf das Jahr w abgezinst und auf Basis der bis dahin verfügbaren Information geschätzt werden. Für das im Jahr w gezeichnete Risiko S (Anfalljahr $s = w+1$) gilt:

$$L_{w+1,0} = E[S]. \qquad (6)$$

$E[S]$ ist Teil der Prämie $E[S]+b$. Da $E[S]$ somit schon im Modell enthalten ist, wird $L_{w+1,0}$ nicht mehr in die Spätschadenreserve eingerechnet. Ist der Schaden schon abgewickelt, d.h. $s=1$, braucht keine Spätschadenreserve mehr gebildet zu werden. Die geschätzte Spätschadenreserve des Unternehmens bzgl. des Schadenjahres $s=1,...,w-1$ am Ende des Betrachtungs-Vorjahres $w-1$ ist

$$L_{s,w-s} = E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1, s-1+j)\cdot Z_{s,j} \mid \sigma(H^Z_{s,w-s}, H^P_{w-1})\right]. \qquad (7)$$

Die Spätschadenreserve $L_{s,w-s}$ muss die am Ende des Vorjahres noch ausstehenden Zahlungen decken. Der produzierte Verlust aus der Abwicklung des Spätschadens von S^s im Geschäftsjahr w ist demnach gegeben durch

$$\Delta L_{s,w-s+1} = L_{s,w-s+1} + Z_{s,w-s+1} - L_{s,w-s}, s = 1,\ldots, w-1. \qquad (8)$$

Dies bedeutet, dass dem Unternehmen im Jahr w für die Abwicklung der Spätschadenreserve der Betrag $L_{s,w-s}$, der im Vorjahr berechnet wurde, zur Verfügung steht. Das Unternehmen leistet im Betrachtungsjahr die Zahlung $Z_{s,w-s+1}$ und schätzt die für die Zukunft benötigte Spätschadenreserve auf den Betrag $L_{s,w-s+1}$. Der Verlust aus der Abwicklung des Spätschadens von S^s lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta L_{s,w-s+1} &= \sum_{j=w-s+1}^{w} P(w, s-1+j) \cdot (E[Z_{s,j} \mid H^Z_{s,w-s+1}] - E[Z_{s,j} \mid H^Z_{s,w-s}]) \\ &+ \sum_{j=w-s+1}^{w} E[Z_{s,j} \mid H^Z_{s,w-s}] \cdot (P(w, s-1+j) - P(w-1, s-1+j)) \\ &=: \Delta L_{1,s,w-s+1} + \Delta L_{2,s,w-s+1}. \qquad (9)\end{aligned}$$

Der Verlust in Periode w aus der Abwicklung der Spätschäden aus den Anfalljahren $s = 1,\ldots, w-1$ ist folglich gegeben durch

$$\Delta L := \sum_{s=1}^{w-1} \Delta L_{s,w-s+1}.$$

$\Delta L_{w,1} = L_{w,1} + Z_{w,1} - L_{w,0} = L_{w,1} + Z_{w,1} - E[S^w]$ wird nicht bei der Änderung der Spätschadenreserve ΔL berücksichtigt, da $E[S^w]$ keine Spätschadenreserve darstellt, sondern im Vorjahr als Prämie in die Gewinn- und Verlustrechnung eingegangen ist. Den Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden ΔL kann man analog zum Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden aus den verschiedenen Abwicklungsjahren zerlegen. Sei $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$ mit

$$\Delta L_i = \sum_{s=1}^{w-1} \Delta L_{i,s,w-s+1} \quad \text{für } i = 1, 2. \qquad (10)$$

Dann bezeichnet ΔL_1 den Verlust aus der reinen Abwicklung der Spätschäden und ΔL_2 den Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden.

Satz 4.1
Der erwartete Verlust aus der reinen Abwicklung der Spätschäden ist Null, d.h.

$$E[\Delta L_1] = 0. \qquad (11)$$

Für den Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden ΔL_2 *gilt:*

$$\Delta L_2 = \underbrace{\sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w, w+t)}_{=:L(w)} - \underbrace{\sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t)}_{=:L(w-1)}$$

$$= \underbrace{\frac{L(w) - L(w-1)}{L(w-1)}}_{=:R_L} \cdot \underbrace{L(w-1)}_{=:l} = R_L \cdot l\,. \tag{12}$$

mit einer zum Zeitpunkt w *bekannten Größe* l *und einer Zufallsvariable* R_L. +

Beispiel (Fortsetzung):
Nun wird die Änderung der Spätschadenreserve unseres Beispielunternehmens berechnet. Dazu nehmen wir an, dass jeder Schaden nach spätestens $w = 4$ *Jahren abgewickelt ist. Wir verwenden für unsere Berechnungen das in Tabelle* 3 *dargestellte Abwicklungsdreieck.*

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	1.723.422
2	16.338.451	10.892.300	7.261.534	
3	14.980.516	9.987.011		
4	16.878.586			

Tabelle 3: Abwicklungsdreieck

Die Änderung der Spätschadenreserve ΔL *wird in den Verlust aus der reinen Abwicklung der Spätschäden* ΔL_1 *und den Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden* ΔL_2 *aufgeteilt. Diese beiden Größen werden zuerst für jedes Anfalljahr berechnet. Wie eben erläutert, verursacht der Schaden* S^s *einen Verlust aus der reinen Abwicklung der Spätschäden von*

$$\Delta L_{1,s,w-s+1} = \sum_{j=w-s+1}^{w} P(w, s-1+j) \cdot \left(E\left[Z_{s,j} \middle| H^Z_{s,w-s+1} \right] - E\left[Z_{s,j} \middle| H^Z_{s,w-s} \right] \right) \tag{13}$$

und der Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden beläuft sich auf

$$\Delta L_{2,s,w-s+1} = \sum_{j=w-s+1}^{w} E\left[Z_{s,j} \middle| H^Z_{s,w-s} \right] \cdot \left(P(w, s-1+j) - P(w-1, s-1+j) \right). \tag{14}$$

Um diese Größen berechnen zu können, benötigt man

a) die Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen auf Basis des heutigen Informationsstandes $E\left[Z_{s,j} \middle| H^{Z}_{s,w-s+1}\right]$,

b) die Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen auf Basis des heutigen Informationsstandes $E\left[Z_{s,j} \middle| H^{Z}_{s,w-s}\right]$,

c) den Zins zur Berechnung des Barwertes einer Geldeinheit P(w, s – 1 + j).

zu a): Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen

Die noch ausstehenden Zahlungen sollen auf Basis der Information, die zum heutigen Zeitpunkt über die Zahlungen verfügbar ist, geschätzt werden. Dies wird durch den bedingten Erwartungswert $E\left[Z_{s,j} \middle| H^{Z}_{s,w-s+1}\right]$ *ausgedrückt. Eine Methode diese Zahlungen zu berechnen, ist das Chain-Ladder-Verfahren[8]. Angewendet auf obiges Abwicklungsdreieck erhalten wir die in Tabelle 4 kursiv dargestellten Zahlungen[9].*

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	1.723.422
2	16.338.451	10.892.300	7.261.534	*1.815.383*
3	14.980.516	9.987.011	*6.658.007*	*1.664.502*
4	16.878.586	*11.252.390*	*7.501.594*	*1.875.398*

Tabelle 4: Ergänztes Abwicklungsdreieck

zu b): Schätzung auf Basis des vergangenen Jahres

Betrachtet man das für das vergangene Jahr relevante Abwicklungsdreieck, so ist das Anfalljahr 4 *aus Tabelle* 3 *für die Bildung einer Spätschadenreserve noch nicht von Bedeutung. Statt dessen wird der Schaden aus dem Anfalljahr s = 0 im Betrachtungsvorjahr abschließend reguliert und ist somit im Abwicklungsdreieck enthalten. Des weiteren wurden die Zahlungen* Z_{14} Z_{23} *und* Z_{32} *noch nicht geleistet und sind folglich in der Tabelle* 5 *kursiv dargestellt. Zur Berechnung der noch ausstehenden Zahlungen wird wieder das Chain-Ladder-Verfahren angewendet. Als Ergebnis erhält man das in Tabelle* 5 *dargestellte Abwicklungsdreieck.*

[8] Für eine ausführliche Darstellung sei auf [Mack(1997), Seite 243 ff] verwiesen.

[9] Die genauen Berechnungen können in [Garschhammer, Seite 88] nachgelesen werden.

Anfalljahr s	Abwicklungsjahr t 1	2	3	4
0	17.264.194	11.509.463	7.672.975	1.918.244
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	*1.723.422*
2	16.338.451	10.892.300	*7.261.534*	*1.815.383*
3	14.980.516	*9.987.011*	*6.658.007*	*1.664.502*

Tabelle 5: Abwicklungsdreieck des Vorjahres

zu c): Berechnung des Barwertes einer Geldeinheit

Zur Berechnung des Barwertes zum Zeitpunkt w *einer zum Zeitpunkt* $w+j$ $(j>0)$ *bezahlten Geldeinheit nehmen wir vereinfachend an, dass der Zinssatz pro Zeiteinheit konstant* r *ist, d.h.* $P(w,w+j)=(1+r)^{-j}$. *Der Zinssatz beträgt in diesem Beispiel* $r=4,5\%$. *Den Barwert zum Zeitpunkt* w *einer zum Zeitpunkt* $w+j$ *bezahlten Geldeinheit entnimmt man aus Tabelle* 6*.*

j	0	1	2	3
P(w,w + j)	1	0,96	0,92	0,88

Tabelle 6: Barwert einer Geldeinheit für r = 4,5%

Nun kann man mit (13) *und* (14) *den Verlust aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden aus den verschiedenen Anfalljahren berechnen* (*Tabelle* 7).

s	$\Delta L_{1,s,5-s}$	$\Delta L_{2,s,5-s}$
1	0	-74.214
2	0	-387.506
3	966.467	-811.680

Tabelle 7: Verlust aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden für die einzelnen Anfalljahre

Mit Formel (10) *erhält man aus der Abwicklung bzw. Verzinsung der Spätschäden*

$$\Delta L_1 = -966.467 \text{ bzw.}$$
$$\Delta L_2 = 1.273.400.$$

Die Änderung der Spätschadenreserve ist folglich

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 306.933.$$

Der Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden ΔL_2 *kann nach* (12) *auch folgendermaßen dargestellt werden:*

$$\Delta L_2 = R_L \cdot l\,.$$

Diese Darstellung vereinfacht später die Berechnung des allgemeinen Modells.
Zur Berechnung von

$$l = L(w-1) = \sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t) = \sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t)$$

und der Rendite

$$R_L = \frac{L(w) - L(w-1)}{L(w-1)} = \frac{\sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(4, 4+t) - \sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t)}{\sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t)}$$

benötigt man die Auszahlungen K_t, *die am Ende der Jahre* $w + t$, $t = 0,1,2$, *fällig werden:*

$$K_t = \sum_{s=t+1}^{w-1} E\left[Z_{s,t+w-s+1} \middle| H^Z_{s,w-s} \right].$$

Mit den entsprechenden Werten aus Tabelle 5 *erhält man*

$$K_0 = 19.706.235,\ K_1 = 8.669.195 \quad \text{und} \quad K_2 = 1.713.453.$$

Zur Berechnung der Größen l *und* R_L *liest man die Barwerte* $P(w,w + j)$ *einer Geldeinheit aus Tabelle* 6 *ab und erhält letztendlich*

$$l = 28.296.860,$$

$$L(w) = \sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(4, 4+t) = 29.571.176 \quad \text{und}$$

$$R_L = \frac{29.571.176 - 28.296.860}{28.296.860} = 4,5\%\,.$$

Mit (12) *ergibt sich für* ΔL_2 *wieder:*

$$\Delta L_2 = R_L \cdot l = 4,5\% \cdot 28.296.860 = 1.273.400 \qquad \square$$

5 Das vollständige Modell

Bisher wurde angenommen, dass das verfügbare Kapital nur zum risikolosen Zins r angelegt werden kann. In diesem Abschnitt wird das vereinfachte Modell durch die Spätschadenreserve und eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit ergänzt. Mit der eben eingeführten Aufspaltung der Änderung der Spätschadenreserve in den Verlust aus der reinen Abwicklung von Spätschäden ΔL_1 und in den Verlust aus der Verzinsung der Spätschäden ΔL_2, d.h. $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$, ist die Ausgangsgleichung des allgemeinen Modells (vergleiche (1)) gegeben durch

$$\Delta U = E[S] + b - S - \Delta L_1 - R_L \cdot l + \Delta A \tag{15}$$

5.1 Quoten-Rückversicherung im vollständigen Modell

Wir teilen den Gewinn aus der Zeichnung des Risikos S ($\Delta S := E[S] - S$) und den Verlust aus der reinen Abwicklung der Spätschäden ΔL_1 in n Einzelrisiken auf. Dabei wird wieder angenommen, dass das Unternehmen nur einen Teil des Zeichnungsrisikos selbst trägt und den Rest an seinen Rückversicherer abtritt. Des weiteren treffen wir die Annahme, dass keine Rückversicherung des Portfolios der Spätschadenreserve erfolgt. Folglich sind l und R_L unabhängig von $\underline{\alpha}$. Mit den Bezeichnungen

X_i : Verlust aus der Zeichnung der Risiken oder aus der Abwicklung der Spätschäden des Teilportfolios i = 1,…,n

X_i^S : Verlust aus der Zeichnung des Risikos des Teilportfolios i = 1,...,I

X_i^L : Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden i = I + 1,…,n

b_i : Sicherheitszuschlag für das gezeichnete Risiko S_i, $i = 1,\dots, I$

α_i : Anteil am Teilrisiko S_i, $i = 1,\dots, I$, den das Unternehmen selbst behält

sowie $X^S = (X_1^S,\dots, X_I^S)^{\boldsymbol{\cdot}}$, $X^L = (X_{I+1}^L,\dots, X_n^L)^{\boldsymbol{\cdot}}$, gilt nach Rückversicherung für das betrachtete Versicherungsunternehmen statt (15) nun

$$\Delta U = \Delta S_{EV} + b_{EV} - \Delta L_1 - R_L \cdot l + \Delta A \tag{16}$$

mit

$$\Delta S_{EV} = E[S_{EV}] - S_{EV} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i (E[S_i] - S_i) = -\sum_{i=1}^{I} \alpha_i X_i^S$$

$$\Delta L_1 = \sum_{i=I+1}^{n} X_i^L$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{I} X_i^S + \sum_{i=I+1}^{n} X_i^L$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{EV} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i X_i^S + \sum_{i=I+1}^{n} X_i^L .$$

Des Weiteren gilt:

$$E[X_i^S] = E[S_i] - E[E[S_i]] = 0 \quad \text{und} \quad E[X_i^L] \overset{(11)}{=} 0.$$

Somit ist auch $E[X_i] = 0$, da X_i entweder den Verlust aus der Zeichnung von Risiken oder den Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden bezeichnet. Um nun eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit ins Modell aufzunehmen, gehen wir davon aus, dass das Versicherungsunternehmen in eine riskante Anlage investieren kann. Wir beschränken uns auf eine einzige risikobehaftete Anlagemöglichkeit, die aber auch einen ganzen Markt abbilden kann. Das Modell kann jedoch ohne größere Schwierigkeiten auf mehrere risikobehaftete Assets erweitert werden. Im Folgenden bezeichnet a den Betrag, der in das risikobehaftete Asset investiert wird, R_A die zugehörige Rendite und $\mu_A := E[R_A]$ die erwartete Rendite. Es wird angenommen, dass die diskontierten Verbindlichkeiten l im Unternehmen als Kapital vorhanden sind. Im Gleichgewicht von Vermögen und Verbindlichkeiten kann das Unternehmen folglich den Betrag l + u – a zum risikolosen Zinssatz r anlegen, d.h.

$$\Delta A = R_A \cdot a + r \cdot (l + u - a) .$$

Gleichung (16) spezifiziert sich nun mit $\underline{1} = (1,\ldots,1)'$ zu

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta S_{EV} + b_{EV} - \Delta L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l + u - a) \cdot r \\ &= \underline{\alpha}' \underline{b} - \underline{\alpha}' X^S - \underline{1}' X^L - (R_L - r) \cdot l + (R_A - r) \cdot a + r \cdot u . \end{aligned} \tag{17}$$

5.2 Ermittlung des optimalen Unternehmensportfolios

Mit Hilfe von Gleichung (17) soll nun das Versicherungsportfolio bestehend aus dem gezeichneten Risiko, dem Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden und der Kapitalanlage bezüglich der Rückversicherungsquote und der risikobehafteten Anlagemöglichkeit optimiert werden. Dazu bezeichne Σ^{XY} die Kovarianzmatrix der Zufallsgrößen X und Y mit $\Sigma^{X} := \Sigma^{XX}$, $\sigma^2_{R_L} := \Sigma^{R_L} = Var[R_L]$, $\sigma^2_{R_A} := \Sigma^{R_A} = Var[R_A]$ sowie

$$\chi^{SR_A} := (\Sigma^{SR_A})^{\cdot} (\Sigma^{S})^{-1} \Sigma^{SR_A} \tag{18}$$

und

$$C^* := \theta u \delta_A + 2 \cdot \underline{1}^{\cdot} \Sigma^{LR_A} + 2l \cdot \Sigma^{R_L R_A} + (\theta u \underline{b} - 2 \cdot \Sigma^{SL} \underline{1} - 2l \cdot \Sigma^{SR_L})^{\cdot} (\Sigma^{S})^{-1} \Sigma^{SR_A} . \tag{19}$$

Für den Ertrag und das Risiko des Unternehmens erhalten wir damit

$$\mu_{EV} = \frac{E[\Delta U]}{u} = \frac{1}{u} \cdot (\underline{\alpha}^{\cdot} \underline{b} - (\mu_L - r) \cdot l + \delta_A \cdot a) + r \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{EV} &= \frac{Var[\Delta U]}{u^2} \\ &= \frac{1}{u^2} \cdot (\underline{\alpha}^{\cdot} \Sigma^{S} \underline{\alpha} + \underline{1}^{\cdot} \Sigma^{L} \underline{1} + l^2 \sigma^2_{R_L} + a^2 \sigma^2_{R_A} + 2 \cdot \underline{\alpha}^{\cdot} \Sigma^{SL} \underline{1} + 2l \cdot \underline{\alpha}^{\cdot} \Sigma^{SR_L} \\ &\quad -2a \cdot \underline{\alpha}^{\cdot} \Sigma^{SR_A} + 2l \cdot \underline{1}^{\cdot} \Sigma^{LR_L} - 2a \cdot \underline{1}^{\cdot} \Sigma^{LR_A} - 2a \cdot l \cdot \Sigma^{R_L R_A}) .\end{aligned}$$

Satz 5.1

Es gelte $\sigma^2_{R_A} - \chi^{SR_A} > 0$ *und die Matrix* Σ^{S} *sei positiv definit. Dann sind der optimale risiko-behaftete Anlagebetrag* a^* *und die optimalen Selbstbehaltquoten* $\underline{\alpha}^*$ *des Erstversicherers, die die Funktion*

$$(a, \underline{\alpha}) \mapsto v(a, \underline{\alpha}) = \theta \cdot \mu_{EV}(a, \underline{\alpha}) - \sigma^2_{EV}(a, \underline{\alpha}), \quad \theta \geq 0,$$

maximieren, gegeben durch

$$a^* = \frac{C^*}{2 \cdot (\sigma^2_{R_A} - \chi^{SR_A})}$$

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}^* &= \frac{1}{2} (\Sigma^{S})^{-1} (a^* \Sigma^{SR_A} + \theta u \underline{b} - 2 \cdot \Sigma^{SL} \underline{1} - 2 \cdot l \cdot \Sigma^{SR_L}) \\ &= \underline{\alpha}^{VM} + \frac{1}{2} (\Sigma^{S})^{-1} (a^* \Sigma^{SR_A} - 2 \cdot \Sigma^{SL} \underline{1} - 2 \cdot l \cdot \Sigma^{SR_L}) .\end{aligned}$$

+

Bemerkungen:

- Wird für den Anlagebetrag $0 \le a^* \le l + u$ gefordert, so ist die optimale Lösung für den Fall, dass der optimale Anlagebetrag aus Satz 1 kleiner als 0 ist gegeben durch

$$a^* = 0$$
$$\underline{\alpha}^* = \underline{\alpha}^{VM} - (\Sigma^S)^{-1}(\Sigma^{SL}\underline{1} + l \cdot \Sigma^{SR_L}).$$

  Für den Fall, dass der optimale Anlagebetrag aus Satz 5.1 größer als $l + u$ ist, ist die optimale Lösung $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ gegeben durch

$$a^* = l + u$$
$$\underline{\alpha}^* = \underline{\alpha}^{VM} + \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}((l+u)\Sigma^{SR_A} - 2 \cdot \Sigma^{SL}\underline{1} - 2 \cdot l \cdot \Sigma^{SR_L}).$$

- In der vorhergehenden Bemerkung wurden nur Restriktionen an den Parameter a berücksichtigt. Ergänzt man das Optimierungsproblem durch die Nebenbedingung $0 \le \underline{\alpha} \le 1$, so lässt sich die Lösung nicht mehr geschlossen darstellen. Sie kann jedoch über ein konvexes Optimierungsproblem numerisch bestimmt werden.

- Bisher wurde im Portfolio der Spätschadenreserve keine Rückversicherung beachtet. Nimmt man jedoch an, dass die Spätschadenreserve ebenfalls durch eine Quoten-Rückversicherung abgesichert wird, so hat dies Auswirkungen auf die Größen

$$\Delta L_1 = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i X_i^L, \quad R_L = R_L(\underline{\alpha}) \quad \text{und} \quad l = l(\underline{\alpha}).$$

  Folglich blieben Σ^L, Σ^{R_L} und Σ^{LR_L} bei der Optimierung erhalten und es wäre zu berücksichtigen, dass die Rückversicherungsquote $\underline{\alpha}$ auch die Höhe der diskontierten Verbindlichkeiten $l = l(\underline{\alpha})$ beeinflusst. +

Als direkte Folgerung aus Satz 5.1 ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 5.2
Sind die Verluste aus der Zeichnung der Risiken der Teilportfolios $i = 1, \dots, I$ *und die Rendite der Kapitalanlage unkorreliert, d.h. gilt* $\Sigma^{SR_A} = 0$*, so ergibt sich der optimale risikobehaftete Anlagebetrag* a^* *und die optimale Selbstbehaltquote* $\underline{\alpha}^*$ *des Erstversicherers zu*

$$a^* = \frac{\theta u \cdot \delta_A}{2\sigma_{R_A}^2} + \frac{\underline{1}^{\prime} \Sigma^{LR_A} + l \cdot \Sigma^{R_L R_A}}{\sigma_{R_A}^2}$$

$$\underline{\alpha}^* = \underline{\alpha}^{VM} - (\Sigma^S)^{-1} (\Sigma^{SL} \underline{1} + l \cdot \Sigma^{SR_L}).$$

Sind die gezeichneten Risiken der verschiedenen Versicherungssparten unkorreliert zur Rendite der risikobehafteten Anlage, so erhalten wir die folgenden interessanten Strukturaussagen:

- Je risikoaverser das Unternehmen, d.h. je kleiner der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter θ, umso geringer die Höhe der risikobehafteten Kapitalanlage.

- Der Anteil des Investments in die risikobehaftete Kapitalanlage ist umso höher, je höher die Überschussrendite aus der risikobehafteten Kapitalanlage ist und steigt mit dem Unternehmenskapital an.

- Aufgrund ihres negativen Beitrags auf das Gesamtrisiko des Unternehmens erhöhen positive Korrelationen zwischen der risikobehafteten Kapitalanlage und dem Verlust aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden das Investment in die risikobehaftete Kapitalanlage.

- Die optimale Selbstbehaltquote ist unabhängig von der Höhe der risikobehafteten Kapitalanlage und setzt sich zusammen aus der optimale Selbstbehaltquote im vereinfachten Modell und einem Abschlag, der proportional zu den Korrelationen zwischen den gezeichneten Risiken der verschiedenen Versicherungssparten und dem Verlust aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden ist.

- Aufgrund ihres positiven Beitrags auf das Gesamtrisiko des Unternehmens wirken positive Korrelationen zwischen den gezeichneten Risiken der verschiedenen Versicherungssparten und dem Verlust aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden reduzierend auf die Selbstbehaltquote.

Beispiel (Fortsetzung):
Wir nehmen nun an, dass das Unternehmen entweder in die risikolose Anlage mit

Rendite $r = 4,5\%$ *oder in ein risikobehaftetes Asset mit Rendite* R_A *investieren kann. Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen* R_A *und* R_L *seien durch* $\mu_A = 12\%, \sigma_{R_A} = 15\%, \mu_{R_L} = 7\%$ *und* $\sigma_{R_L} = 4\%$ *gegeben. Wie bereits erwähnt gehen wir davon aus, dass die drei Sparten Kfz-Haftpflicht, sonstige Kfz-Versicherung und Feuer-/Sachversicherung unkorreliert sind. Weiter sollen diese auch keine Korrelationen zum Kapitalmarkt, d.h. zu* R_L *und* R_A, *aufweisen* $(\Sigma^{SR_L} \equiv 0$ *und* $\Sigma^{SR_A} \equiv 0)$. *Für den Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden* ΔL_1 *wählen wir* $n := I+1$ *bzw.* $X^L_{I+1} := \Delta L_1$ *und setzen die Korrelation zwischen* ΔL_1 *und der Rendite des risikobehafteten Assets* R_A *ebenfalls gleich Null* $(\Sigma^{LR_A} \equiv 0)$. *Nach Simulation verschiedener Zinssätze* r *zur Berechnung des Barwertes* $P(w, w+j)$ *und der Größen* R_L *und* ΔL_1 *wurde auf Basis eines empirischen Korrelationskoeffizienten von* $0,999$ *eine Korrelation von Eins sowie* $\Sigma^L = 77.117.043$ *und* $\Sigma^{LR_L} = 351$ *angenommen. Über die Korrelationen zwischen* S_H *und* ΔL_1, S_K *und* ΔL_1, S_F *und* ΔL_1 *sowie* R_L *und* R_A *konnte aufgrund fehlender Information keine empirische Aussage getroffen werden. Im Folgenden werden deshalb die Korrelationen zwischen* S_H *und* ΔL_1, S_K *und* ΔL_1 *sowie* S_F *und* ΔL_1 *gleich Eins und diejenige zwischen* R_L *und* R_A *gleich Null gesetzt* $(\Sigma^{R_L R_A} = 0)$. *Aufgrund der gemachten Annahmen erhalten wir zunächst:*

$$\Sigma^S = \begin{pmatrix} 603.951.242.449 & 0 & 0 \\ 0 & 57.362.645.025 & 0 \\ 0 & 0 & 4.288.548.116.161 \end{pmatrix}$$

und

$$\Sigma^{SL} = \begin{pmatrix} 6.824.583.054 \\ 2.103.244.531 \\ 18.185.712.770 \end{pmatrix}$$

sowie

$$C^* = \theta u \cdot (\mu_A - r) = 0,1 \cdot 12.000.000 \cdot (12\% - 4,5\%) = 90.000.$$

Mit Korollar 5.2 *folgt damit die optimale Lösung* $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ *mit*

$$a^* = \frac{C^*}{2\sigma_{R_A}^2} = \frac{90.000}{2\cdot(15\%)^2} = 2.000.000$$

$$\underline{\alpha}^* = \underline{\alpha}^{VM} - (\Sigma^S)^{-1}\Sigma^{SL}\underline{1} = \begin{pmatrix} 66,56\% \\ 73,22\% \\ 66,60\% \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,56\% \\ 1,83\% \\ 0,22\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,00\% \\ 71,39\% \\ 66,38\% \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man den optimalen Selbstbehalt $\underline{\alpha}^{VM}$ *des vereinfachten Modells mit dem des vollständigen Modells, so erkennt man den reduzierenden Einfluss der Spätschadenreserve auf den optimalen Selbstbehalt. Dieser ist darauf zurückzuführen, dass durch Berücksichtigung der Spätschadenreserve ein weiterer Unsicherheitsfaktor in das Modell aufgenommen wurde. Durch Verringerung des Selbstbehalts und folglicher Erhöhung der Rückversicherungsquote kann das Unternehmen einen Teil des zusätzlichen Risikos an den Rückversicherer weitergeben.* □

Literatur

[Fletcher(1981)] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization*, Band 2, Constrained Optimization. John Wiley, 1981.

[Garschhammer] Garschhammer, Claudia: *Ein stochastisches Modell zur Ertragsoptimierung eines Sachversicherers*. Diplomarbeit TU München, Juli 2003.

[Greene(1993)] Greene, William H.: *Econometric Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition, 1993.

[Mack(1997)] Mack, Thomas: *Schadensversicherungsmathematik, Heft 28*. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe, 1997.

[Schnieper(1997)] Schnieper, René: *Capital Allocation and Solvency Testing*. Score Notes, Seiten 49 – 104, January 1997.

[Schmidt(2002)] Schmidt, Klaus: *Versicherungsmathematik*. Springer Verlag, 2002.

[Spremann(1996)] Spremann, Klaus: *Wirtschaft, Investition und Finanzierung*. International Management and Finance.

Oldenbourg Verlag, München, 5. Auflage 1996.

[Uhlir(1994)] Uhlir, Helmut und Steiner, Peter: *Wertpapieranalyse.* Physica Verlag, Heidelberg, 3. Auflage, 1994.

[Williams(1991)] Williams, David: *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Zagst(2002)] Zagst, Rudi: *Interest Rate Management*. Springer Finance. Springer Verlag, 2002.